Varianta 5

Subiectul I.

a) $AB = 2\sqrt{2}$.

b) Centrul de greutate al triunghiului ABC este punctul $G(1,1)$.

c) Aria cercului este $S = 10\pi$.

d) $\left|\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}\right| = 1$

e) Cele două curbe au două puncte comune.

f) Ecuația are o singură soluție, $x = \frac{\pi}{2}$.

Subiectul II.

1.

a) $x \in \{-3, 3\}$.

b) $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 395$.

c) Probabilitatea căutată este $p = \frac{2}{3}$.

d) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2$.

e) Suma coeficienților dezvoltării este 81.

2.

a) $f'(x) = e^x - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Deoarece $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.

c) $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $x = 0$ este punct de minim global pentru f, deci $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \infty$.

Subiectul III.

a) Evident.

b) $f(\sqrt[3]{2}) = 0$ și $f \in \mathbf{Q}[X]$ $\Rightarrow$ $f \in H$.

c) Pentru $f_1, f_2 \in H$, avem $(f_1 - f_2)(\sqrt[3]{2}) = 0$, deci $f_1 - f_2 \in H$.

d) Considerăm $a, b, c \in \mathbf{Q}$, astfel încât $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$.

Înmulțind relația anterioară cu $\sqrt[3]{2}$ obținem și $b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} + 2a = 0$.

Reducându-l pe $\sqrt[3]{4}$ din egalitățile precedente, deoarece $a, b, c \in \mathbf{Q}$, obținem

$abc = b^3 = 2a^3$ și apoi $a = b = c = 0$.

e) Dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = aX + b$, cu $a, b \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, din $g\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$ rezultă $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}$, fals.
Dacă $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$, din $g\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$ şi din punctul **d)** obținem că $a = 0$, fals.
Aşadar, nici un polinom de grad 1 sau 2 din $\mathbf{Q}[X]$ nu se află în mulțimea *H*.
f) Considerăm $f \in H$, $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$, cu $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, $a \neq 0$.
$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0 \overset{\text{d)}}{\Rightarrow} b = c = d + 2a = 0 \Rightarrow f = a \cdot \left(X^3 - 2\right)$.
g) Evident, avem $M = \left\{\left(x^3 - 2\right) \cdot q \mid q \in \mathbf{Q}[X]\right\} \subset H$
Fie $f \in H$. Din teorema împărțirii cu rest, există şi sunt unice $q \in \mathbf{Q}[X]$ şi $a, b, c \in \mathbf{Q}$, astfel ca $f = \left(X^3 - 2\right) \cdot q + aX^2 + bX + c$.
Din $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 0$ rezultă $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ şi folosind punctul **d)** se obține că $a = b = c = 0$, deci $f = \left(X^3 - 2\right) \cdot q$, adică şi $H \subset M$.
În concluzie, $H = \left\{\left(x^3 - 2\right) \cdot q \mid q \in \mathbf{Q}[X]\right\}$.

Subiectul IV.
a) Calcul direct.
b) $g'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$, deci g este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.
c) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + x} > 0$, $\forall\, x > 0$.
d) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, avem:
$\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{n}{n+1}$.
e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, funcția f este o funcție Rolle pe $[n, n+1]$ şi din teorema lui Lagrange, există $c_n \in (n, n+1)$ astfel ca $\dfrac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = f'(c_n)$, de unde rezultă concluzia.
f) Din punctul **b)** deducem că $g(n+1) < g(c_n) < g(n)$ şi folosind e**)** obținem $g(n+1) < f(n+1) - f(n) < g(n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
g) Din punctele **a)** şi **f)** obținem

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} < \ln\frac{k+1}{k+2} - \ln\frac{k}{k+1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}^*.$$

Înlocuindu-l succesiv pe k cu numerele 1, 2, ..., n în inegalitatea precedentă şi adunând inegalitățile obținute, rezultă concluzia.